ENSAIT

École Nationale Supérieure
des Arts et Industries Textiles

CONCOURS D'ENTREE A - 1999

EPREUVE de MATHEMATIQUES I

Durée 2 heures

(tous les candidats)

Aucun résultat ne sera pris en compte s'il n'est accompagné de calculs intermédiaires

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées

L'usage des calculatrices est interdit

Formulaire

ch désigne le cosinus hyperbolique, sh le sinus hyperbolique

$ch(a+b) = cha\ \ chb + sha\ \ shb$

a et b réels ou complexes.

$sh(a+b) = sha\ \ chb + shb\ \ cha$

$ch(ix) = \cos x \ ; \ sh(ix) = i \sin x$ $\quad x$ réel

$ch(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ ; \ sh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad z$ complexe

L'objet du problème est l'étude de séries de fonctions de terme général $a(n)\cos(b(n)x)$ où n est un entier naturel, $a(n), b(n)$ des nombres réels et x une variable réelle.
Les cinq parties sont indépendantes

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

I

Soit $a(n)=\frac{1}{2^n}, b(n)=n$. On désigne par (S_1) la série de fonctions de terme général

$u_n(x)=\frac{1}{2^n}\cos(nx)$

1.1 Montrer que (S_1) converge normalement sur $\Re$.

1.2 On pose $U(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$

1.2.1 Calculer $U(0)$, $U(\pi)$

1.2.2 Calculer $U(x)$ et retrouver les résultats précédents. (On pourra utiliser le fait que $\cos nx$ est la partie réelle de e^{inx})

II

Soit $a(n)=\frac{1}{(2n)!}$, $b(n)=2n$. On désigne par (S_2) la série de fonctions de terme général

$v_n(x)=\frac{1}{(2n)!}\cos(2nx)$

2.1 Montrer que (S_2) converge normalement sur $\Re$.

2.2 On pose $V(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$. Calculer $V(x)$.

2.3 Montrer que, pour tout p entier naturel, la fonction V est de classe C^p sur $\Re$ et que

$V^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)^p}{(2n)!}\cos\left(2nx+p\frac{\pi}{2}\right)$

III

Soit $a(n)=\frac{\alpha^n}{n}$ pour n différent de zéro ; $b(n)=n$

où α est un nombre réel compris strictement entre – 1 et 1.

On désigne par (S_3) la série de fonctions de terme général $w_n(x)=\frac{\alpha^n}{n}\cos(nx)$

3.1 Montrer que (S_3) converge normalement sur $\Re$.

3.2 On pose $W(x)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)$. Montrer que la fonction W est de classe C^1 sur $\Re$ et calculer $W'(x)$.

3.3 En déduire $W(x)$.

3.4 Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2\alpha\ \cos x+\alpha^2)\,dx$ (ln désigne le logarithme népérien)

IV

Soit $a(n)=\frac{\alpha^n}{n!}$, $b(n)=n$ où α est un nombre réel.

On désigne par (S_4) la série de terme général $t_n(x)=\frac{\alpha^n}{n!}\ \cos(nx)$

4.1 Montrer que (S_4) converge normalement sur $\Re$.

4.2 On pose $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty} t_n(x)$. Calculer $T(x)$.

4.3 Soit γ un réel non entier relatif, montrer que

$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\gamma\ x)\cos(\sin x)dx = f(\gamma)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n^2-\gamma^2)}$

où $f(\gamma)$ est une fonction que l'on déterminera.

V

Soit $a(n)=\frac{1}{(2n+1)^4}$, $b(n)=2n+1$. On désigne par (S_5) la série de fonctions de terme général $s_n(x)=\frac{1}{(2n+1)^4}\cos(2n+1)x$

5.1 Montrer que (S_5) converge normalement sur $\Re$.

5.2 Montrer que pour $0\le x\le\pi$ on a $\frac{1}{96}\pi(\pi-2x)\ (\pi^2+2\pi\ x-2x^2)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x)$

(on pourra utiliser un développement en série de Fourier).